Пространства путей и распределенные вычисления.

algebraic-brain

http://algebraic-brain.narod.ru

http://algebraic-brain.livejournal.com

Аннотация

В рамках тематики распределенных вычислений вводится понятие *пространства путей*. Изучаются связи между пространствами путей и коалгебраическими структурами (системами переходов). Обсуждаются различные подходы к определению *абстрактных пространств путей*.

В течение нескольких последних лет различными авторами [2, 3, 4] исследуется возможность применения топологических и геометрических методов для анализа поведения распределенных систем. В частности, в работах [2, 3] делаются попытки изучения распределенных вычислений и использования разделяемых ресурсов с помощью математического аппарата алгебраической топологии.

Не подвергая сомнению применимость подобных методов, заметим все-же, что некоторые подходы к топологическому рассмотрению распределенных вычислений иногда кажется несколько искусственными. Авторы достаточно произвольно выбирают хорошо изученные топологические пространства, снабжают их необходимыми модификациями и затем просто используют ранее разработанные методы.

В данной статье мы предлагаем более постепенный и естественный переход к топологическому рассмотрению, осуществляемый с помощью введения понятия *абстрактного пространства путей.* Мы пытаемся показать, что пространства путей естественным образом обобщают системы переходов (англ. transition systems) так, что становится возможным континуальное рассмотрение. В дальнейшем авторы планируют рассмотреть обобщение и более сложных коалгебраических понятий (таких, как системы помеченных переходов, сети Петри и т.д.), но в цели данной статьи это не входит.

1. Будем считать определенными понятия *линейно упорядоченное множество* (или *линейное упорядочение*, или иногда просто *упорядочение*), и *линейно упорядоченное подмножество.* Если a является упорядоченным подмножеством b, то будем говорить что *a вложено в b* ($a \subseteq b$) и *b содержит a* ($b \supseteq a$).

Пусть дано множество M, тогда через $\Theta(M)$ обозначим множество всех линейных упорядочений всех подмножеств M, естественным образом упорядоченное относительно вложений, а именно $a \leq_{\Theta(M)} b$ если и только если $a \subseteq b$. Пустое упорядочение обозначим символом 0.

Пусть a и b - элементы $\Theta(M)$ такие, что $max(a) = min(b)$ и больше нигде эти множества не пересекаются. Тогда будем говорить что a и b *соприкасаются.*

Определим *конкатенацию* на $\Theta(M)$ следующим образом:

$$a \dotplus b \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \sup_{\Theta(M)}\{a, b\}, & \text{если } a \text{ и } b \text{ соприкасаются;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будем говорить, что в $\Theta(M)$ упорядочение b *накрывает a слева* (или a *слитно вложено в b справа*) и писать $a \overset{\Leftarrow}{\subset} b$ если и только если

$$a = b \vee \exists c \colon b = c \dotplus a.$$

Аналогично определяется *накрытие справа* по формуле $a = b \vee \exists c \colon b = a \dotplus c$. (обозначается $a \overset{\Rightarrow}{\subset} b$). Если b накрывает a справа или слева (не исключая то и другое вместе), то просто будем говорить, что b *накрывает* a (или a *слитно вложено в* b) и писать $a \overset{\Leftrightarrow}{\subset} b$; таким образом,

$$a \overset{\Leftrightarrow}{\subset} b \overset{\text{def}}{=} (a \overset{\Leftarrow}{\subset} b) \vee (a \overset{\Rightarrow}{\subset} b).$$

Скажем, что для линейного упорядочения a *определена функция следования*, если и только если для любого элемента x из a, не совпадающего с $max(a)$, существует такой $y > x$, что

$$\forall z \in a \colon z > x \to z \geq y.$$

Тот факт, что некоторый элемент y является именно таким (*следующим*) элементом для x в последовательности a, мы будем записывать в виде $y = a * x$. При этом считаем, что если $max(a)$ определен, то $a * max(a) = max(a)$.

2. Рассмотрим некоторое конечное множество X и функцию $\sigma_X \colon X \to \mathcal{P}(X)$, где $\mathcal{P}(X)$ обозначает множество всех подмножеств X. Следуя [5], мы называем пару (X, σ_X) *коалгебраической структурой* (или *структурой переходов*), определенной на конечном множестве.

Следуя тому же источнику, замечаем, что данное определение просто переформулирует обычное определение *системы переходов*, которая является бинарным отношением $\longrightarrow$ на X. Данное отношение можно определить для коалгебраической структуры так:

$$(x \longrightarrow y) \leftrightarrow y \in \sigma_X(x).$$

Пусть дана коалгебраическая структура (X, σ_X), тогда ее *рефлексивным замыканием* мы будем называть пару $(X, \bar{\sigma}_X)$, определенную по формуле:

$$\bar{\sigma}_X(x) = \sigma_X(x) \cup \{x\}.$$

Если рефлексивное замыкание структуры с ней совпадает, то мы будем называть такую структуру *рефлексивно замкнутой* или просто *рефлексивной.* В данной статье мы будем рассматривать только рефлексивно замкнутые коалгебраические структуры (или системы переходов).

Поскольку множество X конечное, то каждое $a \in \Theta(X)$ имеет функцию следования и для каждого x из a определен следующий элемент $a{*}x$. *Путем* над рефлексивной системой переходов X назовем любое линейно упорядоченное множество $a \in \Theta(X)$ такое, что из $y = a * x$ следует, что $x \longrightarrow y$. Сразу заметим, что при таком определении пути над системой переходов **замкнуты относительно слитных вложений и конкатенаций**. Это означает выполнение следующих условий:

1. Если a - путь и $b \overset{\Leftrightarrow}{\subset} a$, то b - тоже путь;

2. Если a и b - соприкасающиеся пути, то $a \dotplus b$ - тоже путь.

Поэтому для некоторого множества M назовем *абстрактным пространством путей* некоторое $\mathfrak{M}$, подмножество $\Theta(M)$, удовлетворяющее этим условиям. При этом любое абстрактное пространство путей над конечным множеством (да и любое пространство путей, в котором пути обладают функцией следования) определяет рефлексивную систему переходов согласованным образом, по формуле

$$(x \longrightarrow y) \leftrightarrow \exists a\colon y = a * x.$$

Кроме того, легко заметить, что понятие пространства путей обобщает понятие рефлексивной системы переходов – в том случае, если пути не обладают функцией следования. Тогда не для любого пути a и элемента x определен элемент $a * x$ и коалгебраическую структуру построить уже нельзя.

Назовем *базой* пространства путей некоторое $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ такое, что $\mathfrak{M}$ совпадает с замыканием $\mathfrak{X}$ относительно слитных вложений и конкатенаций. Простым примером базы пространства путей является множество направленных прямых в $\mathbb{R}^2$. Соответствующее пространство путей представляет собой множество направленных ломаных в $\mathbb{R}^2$. Этому пространству путей не соответствует никакая коалгебра, т.к. пути в данном случае не обладают функцией следования. Однако можно описать некоторый класс коалгебраических структур, изоморфно вложимых в данное пространство путей, то есть такой класс $\mathcal{K}$, что для каждого $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$ существует подпространство данного пространства, изоморфное $\mathfrak{M}$. Собственно, в этом и заключается весь смысл перехода к континуальному рассмотрению – мы можем не знать точно устройство коалгебры, но быть уверенными в том, что она изоморфно вложима в некоторое пространство путей, и из этого делать некоторые нетривиальные выводы о ее свойствах.

3. Поскольку очевидна аналогия между топологическими пространствами и пространствами путей, попытаемся описать пространства путей через некоторый оператор замыкания.

Пространством путей с замыканием назовем тройку $(M, \mathfrak{M}, C_{\mathfrak{M}})$, где $\mathfrak{M}$ – некоторое подмножество $\Theta(M)$, замкнутое относительно подупорядочений (*носитель пространства путей*), а $C_{\mathfrak{M}}$ это функция $C_{\mathfrak{M}}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$. Должны также выполняться следующие *аксиомы пространства путей с замыканием*:

1. $C_{\mathfrak{M}}(a) \supseteq a$.

2. $C_{\mathfrak{M}}(C_{\mathfrak{M}}(a)) = C_{\mathfrak{M}}(a)$.

3. $C_{\mathfrak{M}}(a \dotplus b) = C_{\mathfrak{M}}(a) \dotplus C_{\mathfrak{M}}(b)$.

Заметим, что из аксиомы 3 сразу следует, что если $a \overset{\Leftrightarrow}{\subset} b$, то $C_{\mathfrak{M}}(a) \overset{\Leftrightarrow}{\subset} C_{\mathfrak{M}}(b)$. Поэтому $C_{\mathfrak{M}}$ действительно напоминает некоторую ослабленную форму оператора замыкания [1, Т. 2, стр. 273].

Упорядочение $C_{\mathfrak{M}}(a)$ будем называть замыканием a. Будем говорить что a является *путем* в $\mathfrak{M}$ если и только если существует b такое, что a является замыканием b.

4. Изучим некоторые свойства пространств путей с замыканием. Упорядочение $x \leq x$, состоящее из единственной точки x, принадлежащей исходному множеству M, будем обозначать $x_{\rightarrow}$. Каждое такое упорядочение будем называть *одноточечным.* Заметим, что если $x_{\rightarrow} \in \mathfrak{M}$, то $C_{\mathfrak{M}}(x_{\rightarrow}) = x_{\rightarrow}$. Действительно, если предположить, что $C_{\mathfrak{M}}(x_{\rightarrow})$ не является одноточечным, то оно не может соприкасаться само с собой. Но тогда

$$0 = C_{\mathfrak{M}}(x_{\rightarrow}) \dotplus C_{\mathfrak{M}}(x_{\rightarrow}) = C_{\mathfrak{M}}(x_{\rightarrow} \dotplus x_{\rightarrow}) = C_{\mathfrak{M}}(x_{\rightarrow}) = 0,$$

причем последнее равенство противоречит аксиоме 1.

Если для некоторого упорядочения a из пространства путей $\mathfrak{M}$ определен $min(a)$, то $min(C_{\mathfrak{M}}(a)) = min(a)$. Действительно, как мы уже доказали, $C_{\mathfrak{M}}(min(a)) = min(a)$, а поскольку $a = min(a)_{\rightarrow} \dotplus a$, то

$$C_{\mathfrak{M}}(a) = C_{\mathfrak{M}}(min(a)_{\rightarrow}) \dotplus C_{\mathfrak{M}}(a) = min(a)_{\rightarrow} \dotplus C_{\mathfrak{M}}(a).$$

Отсюда по определению конкатенации следует, что $min(C_{\mathfrak{M}}(a)) = min(a)$. Аналогичное утверждение можно доказать для операции max.

Утверждение 1 *Если в пространстве путей с замыканием $\mathfrak{M}$ путь b накрывает упорядочение a слева, то a является путем в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если $a \overset{\Leftarrow}{\subset} b$, то по определению существуют такое упорядочение c, что $b = c \dotplus a$. По аксиомам 2 и 3 пространства путей получаем $b = C_{\mathfrak{M}}(b) = C_{\mathfrak{M}}(c \dotplus a) = C_{\mathfrak{M}}(c) \dotplus C_{\mathfrak{M}}(a)$. Но в таком случае из $c \dotplus a = C_{\mathfrak{M}}(c) \dotplus C_{\mathfrak{M}}(a)$ и $a \neq C_{\mathfrak{M}}(a)$ следует $min(C_{\mathfrak{M}}(a)) \neq min(a)$, что, как мы уже доказали, невозможно.□

Похожим образом доказывается аналогичное утверждение для правого накрытия. Таким образом мы доказали, что множество путей замкнуто относительно слитных вложений. Поэтому будет логичным ввести понятие *подпути пути a* как упорядочения, слитно вложенного в a.

Утверждение 2 *Если в пространстве путей с замыканием $\mathfrak{M}$ пути a и b соприкасаются, то $a \dotplus b$ является путем в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. По аксиоме 3 имеем

$$C_{\mathfrak{M}}(a \dotplus b) = C_{\mathfrak{M}}(a) \dotplus C_{\mathfrak{M}}(b) = a \dotplus b,$$

откуда следует замкнутость $a \dotplus b$ □

Аналогичное утверждение можно доказать и для конкатенации бесконечного семейства соприкасающихся путей. Таким образом, множество путей в пространстве с замыканием оказывается замкнутым относительно слитных вложений и конкатенаций, что дает нам следующую простую теорему:

Теорема 1 *Любое пространство путей с замыканием однозначно определяет некоторое абстрактное пространство путей.*

5. Заметим, что обратное к теореме 1 утверждение не может быть верным, т.к. знание замыкания в случае пространств путей дает несколько больше информации, чем просто знание множества всех путей. Для примера рассмотрим пространство путей на множестве $\{u, v, x, y, z\}$, порожденное базой

$$\{(u < x < y < z), (u < v < z)\}.$$

Очевидно, что для упорядочения $\{(u < z)\}$ в данном пространстве путей можно определить два равносильных замыкания: как $(u < x < y < z)$, так и $(u < v < z)$ дают одно и то-же абстрактное пространство путей. Однако эти варианты замыкания не являются изоморфными ни в каком разумном смысле. Поэтому если и можно всегда найти согласованный оператор замыкания для любого абстрактного пространства путей, то, вообще говоря, он не всегда определен с точностью до изоморфизма.

Список литературы

[1] В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др., *Общая алгебра.* Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991.

[2] P. Gaucher and E. Goubault., *Topological deformation of higher dimensional automata.* Homology, Homotopy and Applications, 5(2):p.39–82, 2003.

[3] Gaucher, P., *From concurrency to algebraic topology.* Electronic Notes in Theoretical Computer Science 39 (2000), p. 19pp.

[4] V. Pratt., *Modeling concurrency with geometry.* In ACM Press, editor, Proc. of the 18th ACM Symposium on Principles of Programming Languages, 1991.

[5] J.J.M.M. Rutten., *A calculus of transition systems (towards universal coalgebra).* In Alban Ponse, Maarten de Rijke, and Yde Venema, editors, Modal Logic and Process Algebra, CSLI Lecture Notes No. 53, pages 231-256. CSLI Publications, Stanford, California, 1995.